



Cálculo numérico de ecuaciones diferenciales parciales – Tarea 10

Ejercicio 10.1 [Convergencia de la iteración de Richardson]

Sea A una matriz simétrica y definida positiva con valores propios reales, ordenados. Muestre, que la iteración de Richardson converge si y solo si

$$0 < \omega < \frac{2}{\lambda_n}$$

es válido. Además muestre, que el parámetro óptimo de relajación es dado por

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$$

con radio espectral

$$\rho(B) = \frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}$$

y la matriz de iteración $B = I - \omega_{\text{opt}}A$.

Tarea de casa 10.2 [Ciclo multigrid]

Escriba de manera explícita el primer paso del algoritmo 10.29 (GMG) para $j = 2$ para los casos $\gamma = 1, 2$, es decir, todas recursiones deben ser disueltos.

Además represente el curso gráficamente (j en eje y). Represente (solo) los pasos de restricción, prolongación, alisamiento y solución mediante flechas.

Nota: Los bucles sobre ν_1 y ν_2 pueden ser simplificados por los métodos `presmooth()` y `postsmooth()`.

Tarea de casa 10.3 [Una propiedad del método de Richardson]

Nota: Para esta tarea se necesita las bases del capítulo 10.7.5 (página 235, 236; Jan 08). Especialmente las definiciones de las normas son necesarios.

Sea A_h una matriz simétrica y definida positiva. La iteración de Richardson $x_h^{k+1} = x_h^k + \omega(b_h - A_h x_h^k)$ con $\omega = 1/\lambda_{\max}(A_h)$ cumple

$$\|x_h - x_h^\nu\|_2 \leq \frac{\lambda_{\max}(A_h)}{\nu} \|x_h - x_h^0\|_0$$