Institut für Angewandte Mathematik

Leibniz Universität Hannover

Prof. Dr. Thomas Wick
M.Sc. Philipp Thiele

Hannover, 26.-30.10.2020

Cálculo numérico de ecuaciones diferenciales parciales – Tarea 2

Ejercicio 2.1 [Clasificación I]

Clasifique las siguientes ecuaciones diferenciales con respecto a su orden, linealidad, acoplamiento y si forman un sistema o son escalares. Generalmente sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Por favor, justifique sus respuestas.

(a) Encuentre $u : \Omega \to \mathbb{R}$

$$-\Delta u + \partial_x u = f$$

(b) Encuentre $u : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\partial_{xx} u + \partial_{tx} u = g$$

(c) Encuentre $u : \Omega \to \mathbb{R}$:

$$-\Delta u + u^2 = f$$

(d) Encuentre $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ y $p : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\partial_t + (v \cdot \nabla)v - \frac{1}{Re}\Delta v + \nabla p = f, \quad \nabla \cdot v = 0$$

(e) Encuentre $u : \Omega \to \mathbb{R}$ y $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(\varphi), \\ |\nabla u|^2 - \Delta \varphi &= g(u) \end{aligned}$$

Tarea de casa 2.2 [Clasificación II]

Otra vez: Clasifique las siguientes ecuaciones diferenciales con respecto a su orden, linealidad, acoplamiento y si forman un sistema o son escalares. Generalmente sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Por favor, justifique sus respuestas.

(a) Encuentre $u : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\partial_{xy} u + \partial_y u + u^2 = 0$$

(b) Encuentre $u : \Omega \to \mathbb{R}$:

$$-\nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u)^{\cancel{p/2}} = f$$

(c) Encuentre $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ y $p : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\partial_t v + (v \cdot \nabla)v + \nabla p = f, \quad \nabla \cdot v = 0$$

(d) Encuentre $u : \Omega \to \mathbb{R}$ y $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (a(\varphi)\nabla u) &= f, \\ a(\varphi)|\nabla u|^2 - \Delta \varphi &= g \end{aligned}$$

(e) Dados Ω_1 y Ω_2, con $\Omega_1 \cap \Omega_2 = 0$ y $\bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2 = \Gamma$ y $\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 = \Omega$.
Encuentre $u_1 : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ y $u_2 : \Omega_2 \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 &= f_1 \quad \text{en } \Omega_1, \\ -\Delta u_2 &= f_2 \quad \text{en } \Omega_2, \\ u_1 &= u_2 \quad \text{en } \Gamma, \\ \partial_n u_1 &= \partial_n u_2 \quad \text{en } \Gamma, \end{aligned}$$

Tarea de casa 2.3 [El problema de Poisson - un problema bien definido]

(a) Integre el problema de Poisson de manera explícita y deduzca la formulación

$$u(x) = -\int_0^x \left(\int_0^t f(s)ds \right) dt + C_1 x + C_2$$

(b) También deduzca C_1 y C_2 de manera explícita.

(c) Demuestra, que

$$u(x) = \int_0^L G(x,s)f(s)ds + a\frac{(L-x)}{L} + b\frac{x}{L}$$

resuelve el problema de Poisson.