Institut für
Angewandte Mathematik

Leibniz Universität Hannover

Prof. Dr. Thomas Wick
M.Sc. Philipp Thiele

Hannover, 02.-06.11.2020

Cálculo numérico de ecuaciones diferenciales parciales – Tarea 3

Ejercicio 3.1

Sean $T > 0$ y $\nu > 0$. Consideramos el dominio $\Omega := \mathbb{R}$ y el intervalo de tiempo $I := (0, T)$. Sea $u^0 \in C^0(\Omega)$ una función periódica con periodo 1, entonces cumple que $u^0(0) = u^0(1)$.
Encuentre $u(x,t) \colon \Omega \times I \to \mathbb{R}$, para que

$$\partial_t u(x,t) - \nu \partial_{xx} u(x,t) = 0 \text{ en } \Omega \times I$$
$$u(x,0) = u^0(x) \text{ en } \Omega \times \{0\}$$

es cumplido. Suponemos que el problema es bien propuesto.

Discretización:
Sea $\theta \in [0,1]$. Sea $N \in \mathbb{N}$ el número de pasos de tiempo y $J \in \mathbb{N}$ el número de puntos interiores de la red. Esto implica el incremento de tiempo $k = \frac{T}{N}$ y el tamaño de la malla $h = \frac{1}{J}$ y además los puntos discretos del tiempo $t^n = nk$ $(0 \leq n \leq N)$ y los puntos de red $x_j = jh$ $(-1 \leq j \leq J+1)$.
Denominamos la solución discreta como $U_j^n := U(x_j, t^n)$ y recibimos el siguiente problema discretizado

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} - \theta\nu \frac{U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}}{h^2} - (1-\theta)\nu \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2} = 0$$

para todo $0 \leq n \leq N-1$ y para todo $1 \leq 1 \leq J$.

Valores iniciales y valores de frontera:
Por la periodicidad de periodo 1 recibimos las siguientes condiciones de frontera

$$\forall 0 \leq n \leq N-1, \quad U_0^n = U_J^n, \quad U_{J+1}^n = U_1^n.$$

Como condición inicial $(n = 0)$ escogimos

$$\forall 1 \leq j \leq J, \quad U_j^0 = u^0(x_j).$$

Notación:
Para simplificar la notación introducimos una variable nueva

$$C_d = \nu \frac{k}{h^2}$$

y el vector discreto que resuelve la ecuación

$$U^n = (U_i^n)_{1 \leq i \leq J} \in \mathbb{R}^J$$

(a) Escriba la discretización arriba en notación matricial-vectorial para $0 \leq n \leq N-1$:

$$(B_I^\theta)^{-1} U^{n+1} = B_E^\theta U^n$$

con

$$B_I^\theta = (I + \theta C_d B)^{-1}, B_E = I - (1-\theta) C_d B$$

donde $I \in \mathbb{R}^{J \times J}$ sea la matriz identidad y $B \in \mathbb{R}^{J \times J}$ una matriz cuadrada. Además, explique los elementos de B.

(b) Qué pasa en los casos límites $\theta = 0$ o $\theta = 1$ con B_I^θ y B_E^θ?

(c) Justifique la existencia de B_I^θ.

Tarea de casa 3.2

Dada la ecuación de calor del estado no estacionario

$$
\begin{aligned}
(\partial_t - \partial_{xx})u &= f \text{ en } Q = (0,T) \times \Omega \\
u &= 0 \text{ en } \Sigma = (0,T) \times \partial\Omega \\
u(0,x) &= u_0(x) \text{ en } \Omega
\end{aligned}
$$

(a) Utilice el método de One-step-θ (interpolación lineal entre el método implícito y explícito de Euler) para discretizar la EDP con respecto al tiempo.

(b) ¿Cuál tipo del problema se recibe después de esta discretización?

(c) Utilice el cociente de diferencias central para discretizar el problema con respecto al espacio.

Tarea de casa 3.3

Dada la ecuación de calor del estado no estacionario

$$
\begin{aligned}
(\partial_t - \partial_{xx})u &= f \text{ en } Q = (0,T) \times \Omega \\
u &= 0 \text{ en } \Sigma = (0,T) \times \partial\Omega \\
u(0,x) &= u_0(x) \text{ en } \Omega
\end{aligned}
$$

(a) Utilice el cociente de diferencias central para discretizar el problema con respecto al espacio.

(b) ¿Cuál tipo del problema se recibe después de esta discretización?

(c) Utilice el método explícito de Euler para discretizar el problema generado con respecto al tiempo.

(d) Utilice el método implícito de Euler para discretizar el problema generado con respecto al tiempo.