Institut für
Angewandte Mathematik

Leibniz
Universität
Hannover

Prof. Dr. Thomas Wick
M.Sc. Philipp Thiele

Hannover, 09.-13.11.2020

Cálculo numérico de ecuaciones diferenciales parciales – Tarea 4

Ejercicio 4.1 [Formulaciones I]

(a) Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $a\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.
Encuentre $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} -\nabla(a(x)\nabla u(x)) + b\nabla u(x) + cu(x) &= f \quad \text{en} \quad \Omega \\ u(x) &= 0 \quad \text{en} \quad \Gamma = \partial\Omega \end{aligned}$$

Deduzca la formulación débil para el siguiente problema.

(b) Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y la frontera $\partial\Omega$ (suficiente suave) y V:

$$V := H_0^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega)|\ \partial_{x_i} v \in L^2(\Omega)\ \forall i = 1, \dots, n\ ,\ v = 0 \text{ en } \partial\Omega\}.$$

Además, sea $b : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial. Encuentre $u \in V$, para que

$$(\nabla u, \nabla\phi) + (b\nabla u, \phi) = (f, \phi) \quad \forall \phi \in V.$$

(i) Deduzca la formulación fuerte (D)

(ii) Deduzca (si posible con una justificación) la formulación de la minimización de la energía (M).
Discuta el resultado detalladamente.

Ejercicio 4.2 [Funciones de forma en 1D]

En este ejercicio vamos a deducir las funciones de forma lineales y cuadraticas para el elemento general $[x_0, x_1]$ en una dimensión.
Utilice, donde posible, para la simplificación de la representación $h = x_1 - x_0$. Además, represente todos resultados en una expresión de monomios.

(a) Deduzca mediante la interpolación de Lagrange las funciones de forma lineales $\varphi_0, \varphi_1 \in P_1$

Nota: Cumplen las siguientes condiciones

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

(b) Para las funciones de forma cuadraticas $\psi_i \in P_2, i = 0, 1, 2$ necesitamos otro punto nodal $x_2 = (x_0 + x_1)/2$. Deduzca esta función de comprobación mediante el método de las diferencias divididas de Newton.

Nota: Cumplen las condiciones análogas como en (a)

Tarea de casa 4.3 [Formulaciones II]

(a) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con la frontera $\partial\Omega$ (suficiente suave). Encuentre $u : \Omega \to \mathbb{R}$, para que

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{en } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

Deduzca (si posible con una justificación) la formulación de la minimización de la energía (M) para este problema.

(b) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con la frontera $\partial\Omega$ (suficiente suave). Encuentre $u : \Omega \to \mathbb{R}$, para que

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f \quad \text{en } \Omega \\ u &= g \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

(i) Deduzca la formulación débil (V).

(ii) Deduzca (si posible con una justificación) la formulación de la minimización de la energía (M).
Discuta el resulto detalladamente.

Tarea de casa 4.4 [Formulaciones III]

Consideramos la ecuación de calor del estado no estacionario después de la discretización con respecto al tiempo con el método de One-step-θ (interpolación lineal entre el método implícito y explícito de Euler, resultado de 3.2(a)).

Deduzca la formulación débil para este ecuación diferencial parcial.