Institut für Angewandte Mathematik

Leibniz Universität Hannover

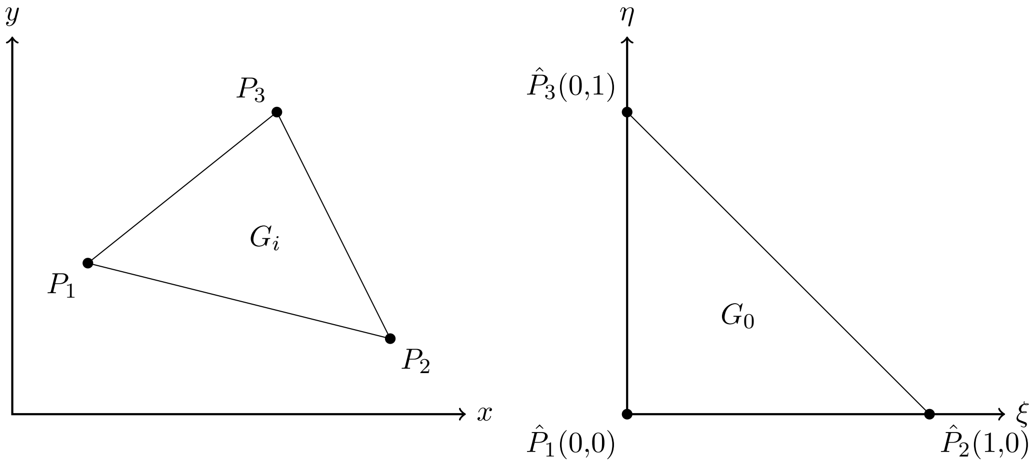
Prof. Dr. Thomas Wick

M.Sc. Philipp Thiele

Hannover, 16.-20.11.2020

Cálculo numérico de ecuaciones diferenciales parciales – Tarea 5

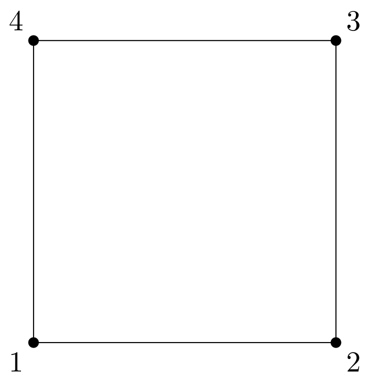
Ejercicio 5.1 ['Master element' de triángulos]



Deduzca una transformación $T\colon (\xi, \eta) \mapsto (x, y)$ desde el triángulo unidad G_0 a un triángulo general G_i.

Ejercicio 5.2 [Matriz de masas para un elemento bilineal]

Dado el cuadrado unidad bilineal $[0, 1] \times [0, 1]$ con grados de libertad en las esquinas.



Las funciones de base (bi)lineales resultan por multiplicación de las funciones de base lineales por x e y:

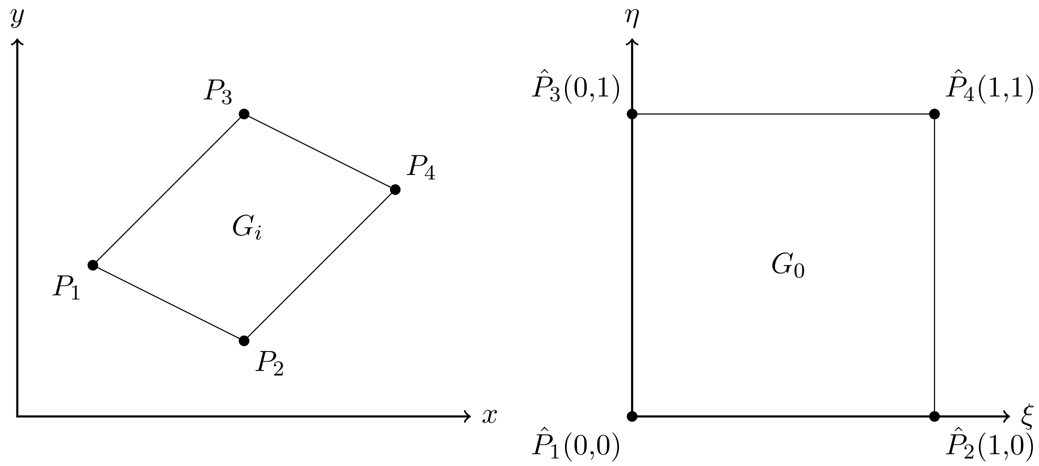
$$\psi_1^x = x, \quad \psi_2^x = (1 - x)$$
$$\psi_1^y = y, \quad \psi_2^y = (1 - y)$$
$$\Longrightarrow$$
$$\varphi_1(x, y) := \psi_1^x(x) \cdot \psi_1^y(y)$$
$$\varphi_2(x, y) := \psi_2^x(x) \cdot \psi_1^y(y)$$
$$\varphi_3(x, y) := \psi_2^x(x) \cdot \psi_2^y(y)$$
$$\varphi_4(x, y) := \psi_1^x(x) \cdot \psi_2^y(y)$$

Calcule, usando la regla de Simpson, la matriz de masas.

$$M_{i,j} = \int_0^1 \int_0^1 \varphi_i(x, y) \cdot \varphi_j(x, y) dx\, dy$$

Nota: Use la simetría y más propiedades de las integrales para simplificar el cálculo.

Tarea de casa 5.3 ['Master element' de un paralelogramo]



(a) Deduzca una transformación $T\colon (\xi, \eta) \mapsto (x, y)$ desde el cuadrado unidad G_0 a un paralelogramo general G_i.

(b) Calcule el determinante jacobiano J, que es necesario para la transformación de la medida de la integral

$$dxdy = J \; d\xi d\eta$$

(c) Usando T y J, reescribir las siguientes integrales como integrales sobre el cuadrado unidad.

$$\iint\limits_{G_i} \varphi \; dxdy \tag{1}$$

$$\iint\limits_{G_i} \varphi^2 \; dxdy \tag{2}$$

$$\iint\limits_{G_i} \langle \nabla\varphi, \nabla\varphi \rangle \;\, dxdy = \iint\limits_{G_i} \frac{\partial\varphi}{\partial x}^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}^2 \; dxdy \tag{3}$$

Tarea de casa 5.4 [Matriz de rigidez para un elemento bilineal]

Dado el elemento unidad bilineal $[0,1] \times [0,1]$, como en la tarea anterior.
Calcule, mediante la regla de Simpson, la matriz de rigidez.

$$K_{i,j} = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \langle \nabla\varphi_i(x,y), \nabla\varphi_j(x,y) \rangle \, dx \, dy$$

Nota: Use la simetría y más propiedades de las integrales para simplificar el cálculo.