

---

**Untersuchung von Kopplungsmechanismen  
von Fluid-Struktur-Interaktion**  
Theorie und Implementierung

---

**MASTERARBEIT**

vorgelegt von  
**Thomas Wick**

Fachbereich 6 - Mathematik

**UNIVERSITÄT SIEGEN**



Donnerstag, 31. Juli 2008



# 1 Einleitung

Im Rahmen eines Projekts der Universität Siegen mit dem Industrieunternehmen ThyssenKrupp werden zwecks Umformsimulationen, elasto-plastische Kontaktprobleme mit Schmiermittel untersucht.

Ein Werkzeug (Struktur 1) mit einer speziell eingestellten Oberfläche trifft auf einen umzuformenden Werkstoff (Struktur 2). Das Schmiermittel befindet sich zwischen den beiden Strukturen und wird in natürlicher Weise einen Gegendruck erzeugen. Das heißt, je mehr sich das Werkzeug dem Werkstoff nähert, desto größer wird der Einfluss des Schmiermittels auf die gesamte Prozedur werden. Zusätzliche Effekte werden durch den direkten Kontakt von Werkzeug und Werkstoff impliziert.

Ein Formalisierung der Situationen leistet das folgende Schema:

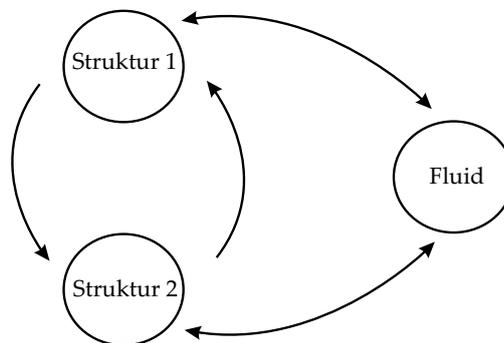


Abbildung 1.1: Struktur-Fluid-Struktur Interaktion

In der Industrie ist man daran interessiert, den Verschleiß des Werkzeugs und die Reibung möglichst gering zu halten. Dies kann durch geschickte Wahl der Werkstoffpaarung, des Schmiermittels und weiterer einfließender Parameter realisiert werden.

Mathematische Modelle, die die Situation angemessen beschreiben, und vor allem den Zusammenhang von Oberfläche und deren funktionaler Wirkung erklären, werden zur Zeit erforscht.

Einen Ansatz bietet die vorliegende Arbeit. Hier wird der Teilaspekt *Struktur-Fluid Interaktion* untersucht. Dazu wird ein kleiner Ausschnitt (Gebiet) einer elastischen Struktur (Festkörper) und dessen Interaktion mit einem newtonschen Fluid (Schmiermittel) diskutiert.

## 1 Einleitung

Eine kurze Beschreibung des Problems:

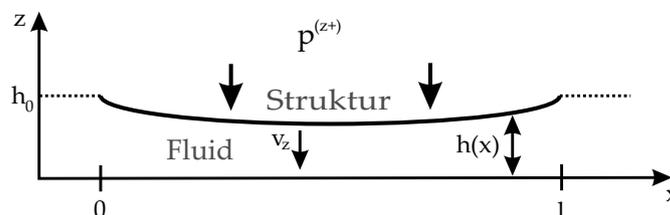


Abbildung 1.2: Oberfläche wird mit dem Druck  $p^{(z+)}$  nach unten gedrückt

Ein elastischer Festkörper (horizontale Länge  $l \sim 0.1m$ ) nähert sich von oben einer festen Fläche, berührt diese aber nicht. Der Abstand beider Flächen liegt in der Größenordnung  $h_0 \sim 10^{-6}m$ .

Zwischen den Flächen befindet sich ein newtonsches Fluid. Beim Zusammendrücken der Flächen entsteht Druck. Dieser wirkt in natürlicher Weise dem von oben wirkenden Druck  $p^{(z+)}$  entgegen, so dass eine Kopplung des Problems entsteht. Durch Iteration erhält man die neue Verlaufskurve der Membran-Gleichung.

Aus der physikalischen Beschreibung des Problems lassen sich zwei partielle Differentialgleichungen (PDGL), inklusive Randbedingungen, ableiten. Die erste PDGL beschreibt eine elastische Membran mit (inhomogenen, konstanten) Dirichlet-Randbedingungen. Diese interagiert mit dem Schmiermittel, wodurch die zweite PDGL, die Reynoldsgleichung, gewonnen wird. Da nur ein kleines Gebiet betrachtet wird und in benachbarten Regionen ähnliche Abläufe stattfinden, wird sich der Druck des Schmiermittels stets verändern. So dass der Druckaustausch zwischen dem betrachteten Gebiet und den Nachbarregionen sinnvolle Randbedingungen (Neumann-Bedingungen) liefert.

In Kapitel 2 werden zunächst in knapper Form die physikalischen Grundlagen der Modelle bereitgestellt. Anschließend werden beide PDGL explizit hergeleitet. Die Ausführungen des Kapitels basieren auf den Werken [Bra07], sowie [SK95] und [GHP97].

Da PDGL in ihrer starken Form oft nicht klassisch lösbar sind, greift man auf schwache Formulierungen zurück. Diese Thematik wird in Kapitel 3 besprochen, welches grundsätzlich [Bra07] und [Hack86] folgt. Da beide PDGL elliptischer Natur sind, kann weitestgehend eine gemeinsame schwache Theorie für beide Modelle hergeleitet werden, in der die klassischen Fragen nach Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen beantwortet werden. Das Neumann-Problem ist nur mit einer Kompatibilitätsbedingung eindeutig lösbar, während die Dirichlet-Aufgabe keine größeren Schwierigkeiten bereitet. Der berechnete Druck aus der Reynoldsgleichung ist nur bis auf eine additive Konstante bestimmt. Die Eindeutigkeit kann durch geeignete Normierung erreicht werden.

Der Kern der Arbeit (Abschnitt 3.6) basiert auf den Ideen von [Sutt00] und besteht aus der Kopplung der beiden PDGL. Die Membran-Gleichung liefert eine Verschiebung, während in die rechte Seite der Reynoldsgleichung die Verschiebungsgeschwindigkeit eingeht. Über ein pseudo-zeitabhängiges Verfahren wird die Membran-Gleichung umformuliert, so dass diese die Verschiebungsgeschwindigkeit liefert. In Abschnitt 5.2 wird diese Theorie in einen formalen Algorithmus gefasst, der anschließend die Grundlage der Implementierung darstellt.

Die schwachen Formulierungen partieller Differentialgleichungen führen zu einer - heute weit verbreiteten - Diskretisierungsmethode: der Methode der Finiten Elemente. Einige theoretische Grundlagen werden dazu in Kapitel 4 erörtert.

Im fünften Kapitel werden die theoretischen Modelle in die Praxis übertragen. Bei der objektorientierten Implementierung in C++ wird das Toolkit *DEAL.II* genutzt. Die pseudo-zeitabhängige Membran-Gleichung und die Reynoldsgleichung werden zunächst in getrennten Klassen implementiert. Danach werden diese, mittels des oben erwähnten Algorithmus, in einer Pseudo-Zeitschleife gekoppelt. Da die Programmierung in größt möglicher Allgemeinheit gehalten worden ist, kann zwischen dem 1D-Fall und dem 2D-Fall problemlos gewechselt werden. Zur Verkürzung der Rechenzeit wird das Programm parallelisiert.

Im nachfolgenden Kapitel werden die Programme mit verschiedenen Zahlenwerten gestartet und die Ergebnisse interpretiert. Zum einen werden Rechnungen zur Reynoldsgleichung mit expliziter Normierung des Drucks gerechnet. Andererseits werden Resultate aufgezeigt, die auf der Reynoldsgleichung mit Strafparameter, ohne explizite Normierung des Drucks, beruhen.

Zuletzt wird die Arbeit in einer kurzen Zusammenfassung rekapituliert und durch einen kleinen Ausblick abgerundet.



# Literaturverzeichnis

- [Alm04] Andreas Almqvist; Rough Surface Elastohydrodynamic Lubrication and Contact Mechanics  
*Lulea University of Technology, 2004*
- [Bes06] Michael Bestehorn ; Hydrodynamik und Strukturbildung  
*Springer Verlag, 2006*
- [BF91] Franco Brezzi, Michel Fortin ; Mixed and Hybrid Finite Element Methods  
*Springer Verlag, 1991*
- [BHK08] Wolfgang Bangerth, Ralf Hartmann, Guido Kanschat; deal.II Differential Equations Analysis Library, Technical Reference  
*<http://www.dealii.org>, 2008*
- [Bra07] Dietrich Braess; Finite Elemente  
*Springer Verlag, 2007*
- [DL76] Georges Duvaut, Jacques Louis Lions; Inequalities in Mechanics and Physics  
*Springer Verlag, 1976*
- [GHJV01] Erich Gamma, Richard Helm, Ralph Johnson, John Vlassides ; Entwurfsmuster  
*Assison-Wesley, 2001*
- [GHP97] Etienne Guyon, Jean-Pierre Hulin, Luc Petit ; Hydrodynamik  
*Vieweg Studium, 1997*
- [GHSW95] Dietmar Gross, Werner Hauger, Walter Schnell, Peter Wriggers ; Technische Mechanik 4, 2.Auflage  
*Springer Verlag, 1995*
- [Gim06] Frank Gimbel ; Modellierung und Simulation von Kontaktproblemen mit Schmiermittel  
*Universität Siegen, Masterarbeit , Dezember 2006*
- [GR92] Christian Grossmann, Hans-Görg Roos ; Numerik partieller Differentialgleichungen  
*Teubner Verlag, 1992*
- [Hack86] Wolfgang Hackbusch ; Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen  
*Teubner Studienbücher, 1986*

- [Han06] Martin Hanke-Bourgeois ; Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens  
*Teubner Verlag, 2006*
- [Joh87] Claes Johnson; Numerical solution of partial differential equations by the finite element method  
*Studentlitteratur, 1987*
- [KA00] Peter Knabner, Lutz Angermann ; Numerik partieller Differentialgleichungen  
*Springer Verlag, 2000*
- [Koe02] Konrad Königsberger; Analysis 2  
*Springer Verlag, 2002*
- [PR05] Yehuda Pinchover, Jacob Rubinstein ; An Introduction to Partial Differential Equations  
*Cambridge University Press, 2005*
- [Rann05] Rolf Rannacher ; Numerische Methoden der Kontinuumsmechanik (Numerische Mathematik 3)  
*Universität Heidelberg, Skript, WS 2004/05*
- [Rei96] Hans-Jürgen Reinhardt ; Die Methode der Finiten Elemente  
*Universität Siegen, Skript, WS 1995/96*
- [Sah05] Frederik Sahlin; Hydrodynamic Lubrication of Rough Surfaces  
*Lulea University of Technology, 2005*
- [SK95] Hans Stephani, Gerhard Kluge ; Theoretische Mechanik  
*Spektrum Akademischer Verlag, 1995*
- [Sta07] Holger Stark ; Immer in Bewegung bleiben  
*Physik Journal, 6. Jahrgang, November 2007*
- [Sutt00] Franz-Theo Suttmeier; Fehlerabschätzung und adaptive Gittersteuerung für Elasto-Plastizitätsprobleme  
[www.mathematik.uni-dortmund.de/lxx/research/projects/suttmeier/plastiwww/plastiwww.html](http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lxx/research/projects/suttmeier/plastiwww/plastiwww.html)  
*April 2000*
- [Wer05] Dirk Werner ; Funktionalanalysis , 5., erweiterte Auflage  
*Springer, 2005*
- [Zie97] Jürgen Zierep ; Grundzüge der Strömungslehre  
*Springer Verlag, 1997*