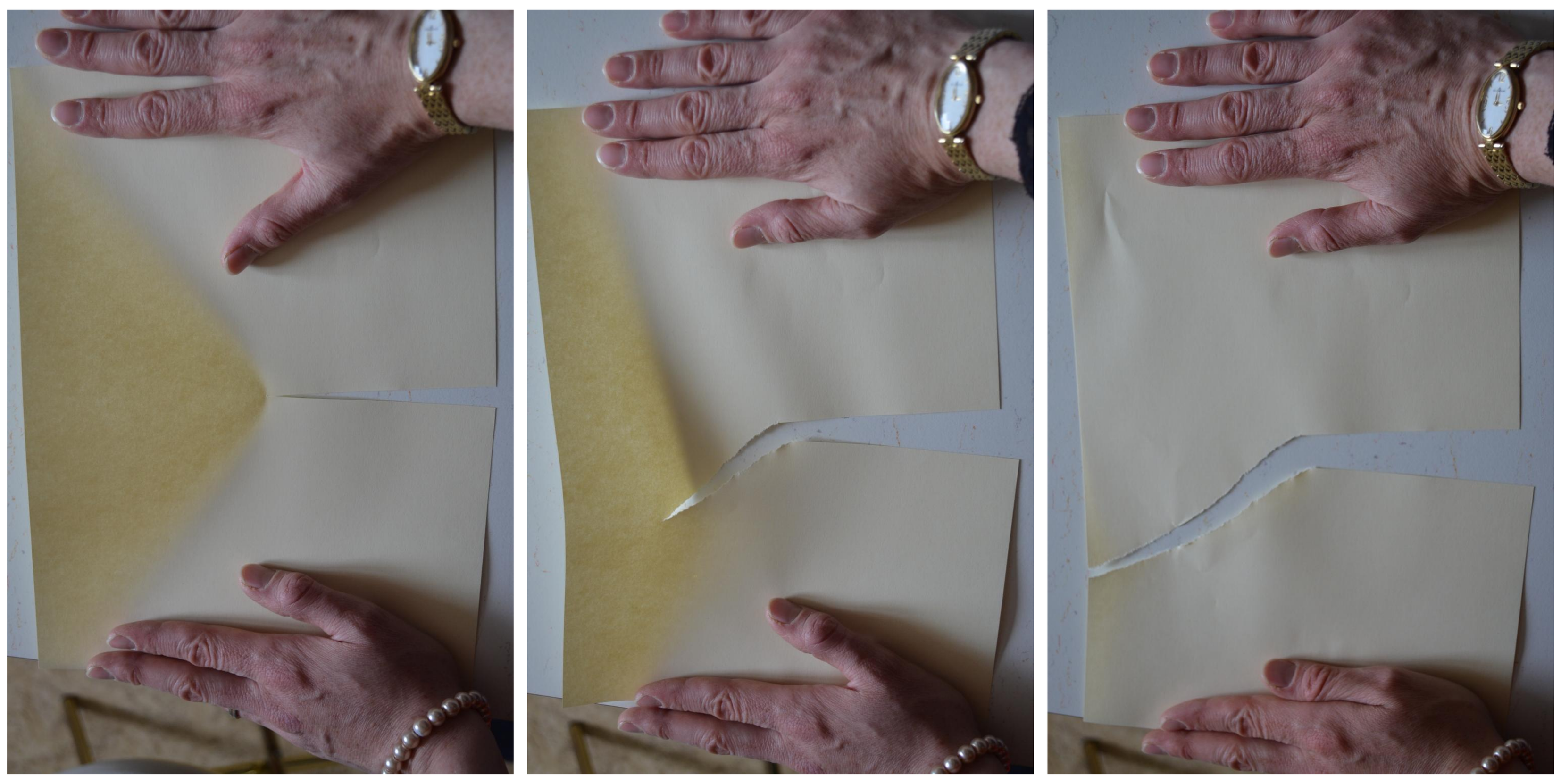
ÖAW AUSTRIAN ACADEMY OF SCIENCES

Was ein Blatt Papier und Mathe gemeinsam haben: beide sind bis zum Zerreißen spannend

RICAM JOHANN-RADON-INSTITUTE FOR COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

Institut für Numerische Mathematik (Prof. Ulrich Langer)

Das Blatt Papier



- **Problemstellung:** vorgegebener Riss in einem Blatt Paper;
- **Versuchsaufbau:** halte Blatt unten fest und verschiebe oben parallel zum Riss;
- **Beobachtung:** Erhöhung der Scherkraft lässt Blatt anfangs noch nicht reißen. Ab einem bestimmten Zeitpunkt entsteht ein kurvenförmiger Riss;
- **Interpretation:** Die Scherkräfte am oberen Rand müssen eine kritische Größe überschreiten (kritischer Spannungsintensitätsfaktor), bevor das Blatt reißen kann. Die Rissfortschrittsrichtung kann mit Hilfe der Hauptspannungsrichtungen berechnet werden.

Die Mathematik

- Die (angewandte oder auch numerische) Mathematik stellt Werkzeuge bereit, um das mechanisch-physikalische Problem in einer abstrakten Sprache zu formulieren: Finde die Rissvariable φ und ein Verschiebungsfeld $\mathbf{u}$ in einem Gebiet B mit Rand $\partial_D B \cup \partial_N B$, so dass die folgenden Gleichungen erfüllt sind:

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{div}\Big(\big((1-k)\varphi^2+k\big)\mathcal{G}e(\mathbf{u})\Big)+\varphi^{1+b}\mathbf{f}-\operatorname{div}\,(\varphi^{1+b}\mathcal{F}) &= 0 \quad \text{in} \quad B,\\
-G_c\varepsilon\Delta\varphi-\frac{G_c}{\varepsilon}(1-\varphi)+(1-k)\mathcal{G}e(\mathbf{u}):e(\mathbf{u})\varphi & \\
+2\varphi^b(\mathcal{F}:e(\mathbf{u})+\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}) &\le 0 \quad \text{in} \quad B,\\
\partial_{\Delta t}\varphi &\le 0 \quad \text{in} \quad B\\
\Big\{-G_c\varepsilon\Delta\varphi-\frac{G_c}{\varepsilon}(1-\varphi)+(1-k)\mathcal{G}e(\mathbf{u}):e(\mathbf{u})\varphi & \\
+2\varphi^b(\mathcal{F}:e(\mathbf{u})+\mathbf{f}\cdot\mathbf{u})\Big\}\partial_{\Delta t}\varphi &= 0 \quad \text{in} \quad B,\\
\mathbf{u} &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial_D B,\\
\big((1-k)\varphi^2+k\big)\mathcal{G}e(\mathbf{u})\mathbf{n}+\varphi^{1+b}\mathcal{F}\mathbf{n} &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial_N B.\\
\partial_n\varphi &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial B,
\end{aligned}
$$

wobei k und ε 'klein' gewählt werden, $b=1$, $\mathcal{G}e(\mathbf{u})$ ist der Spannungstensor, $\mathbf{f}$ und $\mathcal{F}$ sind 'rechte' Seiten und gegebene Größen und G_c kennzeichnet die kritische Energie, die erforderlich ist, so dass der Riss wächst.

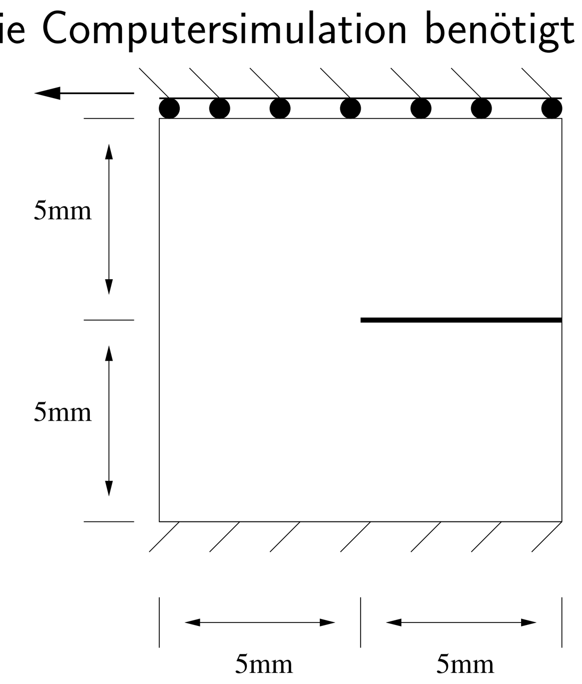
- Wofür brauchen wir diese Gleichungen?

⇒ **Mathematische Analyse:** existiert eine Lösung und ist diese eindeutig? D.h. liefert die Lösung dieser Gleichungen tatsächlich einen Riss (Existenz)? Falls ja, werden die Gleichungen immer denselben Risspfad vorhersagen oder könnte der Riss einen anderen Weg nehmen (Eindeutigkeit)?

⇒ **Entwicklung numerischer Algorithmen und Diskretisierung**, die dann in Computersprache (z.B. C++, Fortran) übersetzt werden können.

⇒ Untersuchung der Diskretisierung und algorithmischen Techniken auf deren **Effizienz** (Rechen-Laufzeit), **Stabilität** (wie reagiert der Algorithmus auf andere Parameter bzw. Rand- und Anfangsdaten) und **Fehleranalyse** (wie genau approximiert der Algorithmus die tatsächliche Lösung?).

- Die Computersimulation benötigt eine Anfangsgeometrie sowie Anfangs- und Randdaten:



– wie sieht die Anfangslösung aus - z.B. ist am Anfang bereits ein Riss in dem Blatt Paper vorhanden oder nicht?

– An welchem Rand wird gezogen und wie groß ist die Kraft mit der gezogen wird? Welche Daten werden an den anderen Rändern beschrieben?

⇒ Die inkorrekte Beschreibung von Randdaten ist eine der häufigsten Fehlerquellen bei der Durchführung numerischer Simulationen.

- Das mathematische Modell basiert auf einem sogenannten Finite-Elemente-Phasenfeld-Ansatz und die Computersimulation liefert dann die folgenden Ergebnisse:

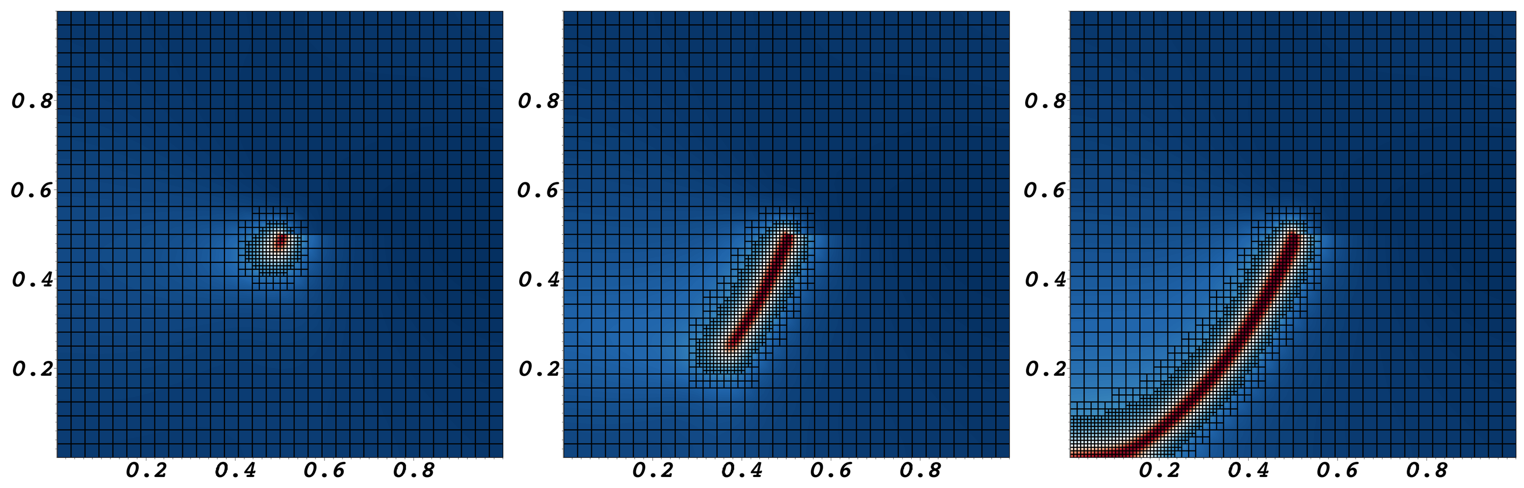
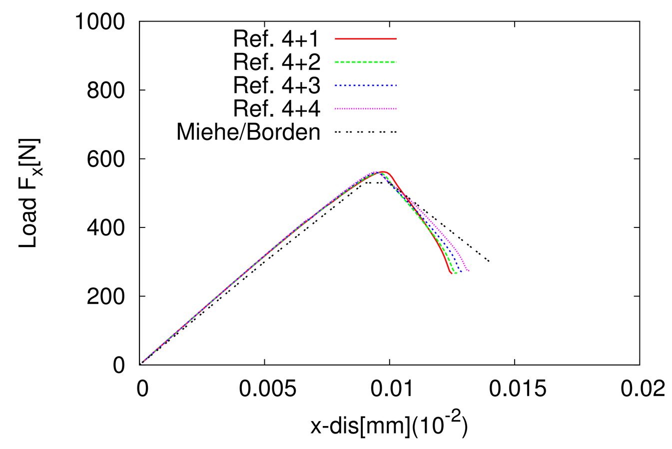


Abbildung: Der Riss ist in Rot dargestellt und entspricht dem experimentellen Papier-Test.

Was ist nun das Spannende?

- Spannung im Blatt Papier: Die Erhöhung der Kraft am oberen Blattrand führt nicht unmittelbar zum Riss. Dadurch steigt die elastische Energie im Blatt und damit auch die Scherspannung am obereren Rand:



– Sobald der Riss wächst, wird elastische Energie in Rissenergie umgewandelt und dadurch fällt die Spannung am oberen Rand ab. D.h. die 'Load F_x'-Kurve nimmt ab. Die Werte werden zu anderen Literaturwerten 'Miehe/Borden' verglichen.

- Spannung in der Mathematik: Der interessante Aspekt solcher Problemstellungen ist der **interdisziplinäre** Ansatz, d.h. Kombination verschiedener wissenschaftlicher Gebiete:

Mechanik, Physik, angewandte Mathematik und Softwareentwicklung.

Feedback-Ansatz:

Experiment ↔ Theorie ↔ Wissenschaftliches Rechnen

Warum ist das nun alles nützlich?

Numerik im Allgemeinen:

- Oftmals sind rein theoretische Aussagen und Formeln zu aufwendig zu berechnen, und gelten dann lediglich für eine sehr spezielle (akademische) Konfiguration;
- Andererseits sind Experimente **oft zu teuer, zu gefährlich, zu aufwendig** oder schlicht **unmöglich** durchzuführen;
- Dadurch bildet die numerische Mathematik/das wissenschaftliche Rechnen eine dritte Säule in der naturwissenschaftlichen Forschung. Konkret werden im wissenschaftlichen Rechnen mathematische Modelle, numerische Algorithmen sowie Software entwickelt, die dann zur Beantwortung wissenschaftlicher Fragestellungen aus anderen Disziplinen herangezogen werden können.

Numerik im Speziellen:

- Untersuchung von Rissausbreitung und Schädigung in Schrauben:

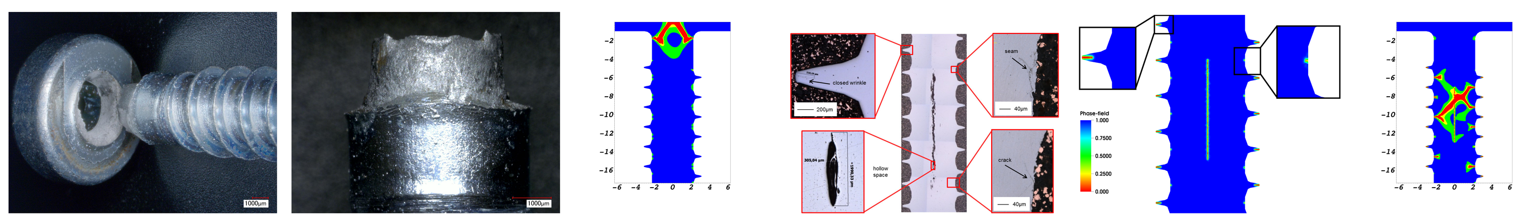


Abbildung: Kooperation mit EJOT (D. Wick, http://www.ejot.com/). Bild 1 und 2: Experimenteller Zugversuch an der Schraube (Kopf bricht trichterförmig ab). Bild 3: Numerische Simulation dieses Zugversuchs. Bild 4: Schema auftretender Risse im Innern der Schraube. Bild 5: Numerisches Setup der zugehörigen Finite-Elemente-Phasefeld-Methode. Bild 6: Resultierendes Rissschema nach 'numerischem Zugversuch'.

- Weitere Beispiele, wo Risse verhindert werden sollten: Risse im Stahlbeton in Brücken, Ermüdungsbruch im Knochen, Materialermüdung im Allgemeinen, z.B. ICE-Unfall von Eschede in 1998.

Information zum Projekt

- Projektbearbeitung: Dr. Thomas Wick (Research Scientist) am Johann Radon Institute for Computational and Applied Mathematics (RICAM) Linz
- Den Schwerpunkt der Arbeit bilden die Entwicklung effizienter und robuster numerischer Methoden zur Lösung von Multiphysikproblemen (d.h. Kopplung mehrerer Prozesse), z.B.
  – Kopplung von Strömungen mit elastischen Strukturen (Fluid-Struktur-Wechselwirkung)
  – Kopplung von chemikalischen Reaktionen mit Strömungen
  – Rissbildungsprozesse und Schädigung in Strukturmechanik und porösen Medien
- Weitere Informationen unter: https://people.ricam.oeaw.ac.at/t.wick/

www.ricam.oeaw.ac.at